JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **137**, 49–75 (1996)
ARTICLE NO. 0040

Equations du type de Monge–Ampère sur les variétés hermitiennes compactes

Abdellah Hanani

UFR de Mathématiques, Université de Lille I, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

Received October 1994

Soit (X, g) une variété hermitienne compacte. Si $\varphi \in C^2(X)$, soit $M(\varphi) = \det(\delta^\lambda_\mu + \nabla^\lambda_\mu \varphi)$. Etude d'équations de la forme $M(\varphi) = F(x, \nabla\varphi; \varphi)$ où $F \in C^\infty(TX \times \mathbb{R})$ est une fonction partout strictement positive ayant une croissance exponentielle en $|\varphi|$ et majorée par une puissance de la norme du gradient de φ. Let

is bounded by a power of the norm of the gradient of φ.

Introduction

Soit (X_{2m}, g) une variété hermitienne compacte. On étudie dans cet article des équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires du type de Monge–Ampère de la forme,

$$\det(\delta^\lambda_\mu + \nabla^\lambda_\mu \varphi) = F(x, \nabla\varphi; \varphi),$$

où $F \in C^\infty(TX \times \mathbb{R})$ est partout strictement positive. Lorsque g est kählérienne et $F = \exp[-\lambda\varphi + f(x)]$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in C^\infty(X)$, on obtient alors l'équation à laquelle conduisent la recherche de métriques d'Einstein–Kähler et la conjecture de Calabi à savoir que toute (1–1)-forme de la première classe de Chern est la forme de Ricci d'une métrique kählérienne sur X. Ces problèmes ont été résolus par Aubin [1–5] et Yau [11].

Dans cette étude, on se place en métrique hermitienne avec un second membre F plus général. Dans [7], Cherrier a, entre autres, résolu le cas où $F = \exp[\lambda\varphi + f(x)]$, $\lambda \geqslant 0$ et $f \in C^\infty(X)$, par la méthode de continuité, puis, par un argument de point fixe, le cas d'un second membre $F(x, \varphi)$ majorée par une puissance de $|\varphi|$. On prouve ici des résultats d'existence pour une croissance de F en $e^{a|\varphi|}(1 + |\nabla\varphi|^b)$ avec $0 < a$ et $0 < b$. Notons les points suivants consernant les estimées a priori requises pour résoudre ces équations. On obtient l'estimée C^0 à partir d'une majoration de l'intégrale de l'exponentielle des fonctions admissibles jointe à une procédé itératif

0022-1236/96 $18.00

d'Aubin. Contrairement au cas kählérien, l'estimation des dérivées secondes mixtes ne se déduit pas directement de l'estimée C^0; l'estimée C^1 s'impose. De même une fois l'équivalence des métriques $g_{\lambda\bar{\mu}} + \nabla_{\lambda\bar{\mu}}\varphi$ acquise, l'estimation des dérivées secondes pures est nécessaire pour pouvoir majorer a priori les dérivées troisièmes mixtes.

I. Notations et Préliminaires

1. Soit X_{2m} une variété complexe compacte de dimension complexe $m \geqslant 2$. Toutes les représentations locales de tenseurs que nous considérons sont relatives à des systèmes de coordonnées $(z^\lambda = x^\lambda + iy^\lambda)_{\lambda=1,\dots,m}$ adaptées à la structure complexe. Pour $a, b \in \{1, \dots, m, \bar{1}, \dots, \bar{m}\}$, on note

$$z^{\bar{\lambda}} = \overline{z^\lambda}, \qquad e_a = \partial_a = \frac{\partial}{\partial z^a}, \qquad \partial_{ab} = \frac{\partial^2}{\partial z^a \partial z^b}.$$

Soit g une métrique hermitienne sur X, c'est-à-dire un tenseur deux fois covariant, réel et symétrique défini par $g = g_{\lambda\bar{\mu}}\, dz^\lambda \otimes dz^{\bar{\mu}}$ telle que la matrice $(g_{\lambda\bar{\mu}})_{\lambda,\mu}$ est partout hermitienne définie positive sur X. Le tenseur $g^{-1} = g^{\lambda\bar{\mu}} e_\lambda \otimes e_{\bar{\mu}}$ défini par la matrice $(g^{\lambda\bar{\mu}})_{\lambda,\mu}$, transposée de l'inverse de la matrice $(g_{\lambda\bar{\mu}})_{\lambda,\mu}$, est aussi réel symétrique.

L'élément de volume orienté associé à la métrique g est la forme dV d'ordre $2m$ définie localement par

$$\begin{aligned} dV &= (i/2)^m \det(g)\, dz^1 \wedge dz^{\bar{1}} \wedge \cdots \wedge dz^m \wedge dz^{\bar{m}} \\ &= \det(g)\, dx^1 \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \wedge dy^m. \end{aligned}$$

La connexion de Chern ∇ de la variété (X, g) est l'unique connexion réelle, compatible avec la métrique g telle que, si on pose

$$\nabla_{e_a} e_b = \Gamma^c_{ab} e_c,$$

seuls les symboles de Christoffel non mixtes $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, où λ, μ, et $\nu \in \{1, \dots, m\}$, ne sont pas identiquement nuls.

Pour tout tenseur $t = t^c_d\, dz^d \otimes e_c$, le défaut de symétrie du tenseur $\nabla^2 t$ se traduit par:

$$\nabla_{ab} t^c_d - \nabla_{ba} t^c_d = R^c_{eab} t^e_d - R^e_{dab} t^c_e - T^e_{ab} \nabla_e t^c_d, \tag{1}$$

où T^c_{ab} et R^c_{eab} désignent les composantes des tenseurs de torsion $\mathscr{T}$ et de courbure $\mathscr{R}$.

Enfin, toutes les notations que nous utiliserons suivent celles dans [7], en particulier, nous désignons par

$$\Delta\varphi = -\nabla^\lambda_\lambda \varphi = -g^{\lambda\bar{\mu}} \nabla_{\lambda\bar{\mu}} \varphi, \qquad |\nabla\varphi|^2 = \nabla^\lambda \varphi \nabla_\lambda \varphi = g^{\lambda\bar{\mu}} \nabla_\lambda \varphi \nabla_{\bar{\mu}} \varphi$$

le laplacien et le carré de la norme du gradient d'une fonction φ. Signalons que le laplacien possède une fonction de Green $G(P, Q)$ telle que, si $\varphi \in C^2(X)$,

$$\varphi(P) = \tilde{\varphi} + \int_X G(P, Q)\, \Delta\varphi(Q)\, dV(Q), \tag{2}$$

où $\tilde{\varphi} = V^{-1} \int_X \varphi\, dV$ est la moyenne de φ sur X.

Notons $G_Q(P) = G(P, Q)$. Nous disons que la métrique g vérifie l'hypothèse $\mathscr{H}$, si elle possède l'une des propriétés suivantes:

(i) $\sup_{Q \in X} \int_X |T^{\lambda}_{\lambda\mu} \nabla^{\mu}_P G_Q(P)|\, dV(P) < 1$

(ii) g est conformément kählérienne.

2. Soit $\mathscr{A} \subset C^2(X)$ l'ensemble convexe des fonctions admissibles relativement à la métrique g défini par

$$\mathscr{A} = \{\varphi \in C^2(X); \text{la matrice hermitienne } (g'_{\lambda\bar{\mu}})_{\lambda,\mu} = (g_{\lambda\bar{\mu}} + \partial_{\lambda\bar{\mu}}\varphi)_{\lambda,\mu} \text{ est partout définie positive}\}.$$

Un repère g-orthonormé en P diagonalisant la matrice $(\partial_{\lambda\bar{\mu}}\varphi(P))_{\lambda,\mu}$ sera dit adapté à φ.

Si $\varphi \in \mathscr{A} \cap C^{\infty}(X)$, on peut considérer la métrique hermitienne $g' = g_{\varphi} = g + i\partial\bar{\partial}\varphi$ représenter localement par la matrice $(g'_{\lambda\bar{\mu}})_{\lambda,\mu}$. Les éléments de volume relatifs à g et g' sont reliés par la relation

$$dV' = M(\varphi)\, dV,$$

où $M(\varphi)$ est l 'opérateur de Monge–Ampère complexe

$$M(\varphi) = \frac{|g'|}{|g|} = \det(\delta^{\lambda}_{\mu} + \nabla^{\lambda}_{\mu}\varphi), \text{ où } |g| = \det(g).$$

Soit F une fonction numérique C^{∞} définie sur $TX \times I$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on s'intéresse à la mise en évidence de solutions admissibles φ de l'équation

$$\operatorname{Log} M(\varphi) = F(x, \nabla\varphi; \varphi).$$

3. En préliminaire, donnons une généralisation d'un lemme d'Hörmander [9, p. 97] et Tian [10, p. 228] relatif à l'intégrale de l'exponentielle des fonctions plurisousharmoniques sur la boule de $\mathbb{C}^m$. Mais tout d'abord la formule intégrale suivante; pour tout champ de vecteur $Y = Y^{\lambda} e_{\lambda}$ à support compact,

$$\int_X \nabla_{\lambda} Y^{\lambda}\, dV = \int_X T^{\mu}_{\mu\lambda} Y^{\lambda}\, dV. \tag{4}$$

En utilisant une partition de l'unité, on se ramène au cas où le support de Y est contenu dans le domaine U d'une carte locale. Comme

$$\partial_\lambda |g| = |g| \, g^{\mu\bar{v}} \partial_\lambda g_{\mu\bar{v}} = \Gamma^\mu_{\lambda\mu} |g|,$$

une intégration par parties permet alors d'écrire:

$$\int_X \nabla_\lambda Y^\lambda \, dV = \int_U (\partial_\lambda Y^\lambda + \Gamma^\lambda_{\lambda,\mu} Y^\mu) \, |g| \, dx^1 \cdots dy^m$$

$$= \int_U Y^\lambda (-\partial_\lambda |g| + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} |g|) \, dx^1 \cdots dy^m$$

$$= \int_U Y^\lambda (\Gamma^\mu_{\mu\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\mu}) |g| \, dx^1 \cdots dy^m = \int_X Y^\lambda T^\mu_{\mu\lambda} \, dV.$$

LEMME 1. *Soit $B_R(O)$ la boule centrée en O et de rayon R et soit a un réel positif. Pour Toute fonction φ plurisousharmonique dans B_R telles que $\varphi(O) = 0$ et $\varphi(z) \leqslant 1$ pour tout $z \in B_R$, on a*

$$\int_{|z| < r} e^{-a\varphi(z)} \, d\lambda(z) \leqslant C,$$

où $r < Re^{-a/2}$ et C une constante positive ne dépendant que de m, a et R.

Démonstration. C'est une simple modification du lemme 4.4 d'Hörmander [9, p. 97].

LEMME 2. *Sous l'hypothèse $\mathscr{H}$ sur la métrique g, il existe des constantes positives α, C_1 et $C_2(\alpha)$ ne dépendant que de (X, g) telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{A}$, on ait:*

(i) $\varphi - \tilde{\varphi} \leqslant C_1$.

(ii) $\int_X e^{-\alpha(\varphi - \tilde{\varphi})} \, dV \leqslant C_2(\alpha)$.

Démonstration. La première partie du lemme se démontre comme dans Cherrier [7, pp. 348–351]. Pour établir l'autre partie, notons $u = \varphi - \tilde{\varphi}$ et remarquons qu'au voisinage de chaque point de X; la métrique g peut être majorer par un multiple de la métrique euclidienne g^0. On fixe alors un recouvrement de X par des boules $B_{r_i/4}(x_i)$, $i \in \{1, ..., N\}$, où r_i est un réel strictement positif et assez petit telle que $g \leqslant bg^0$ partout dans $B_{2r_i}(x_i)$, b étant une constante positive.

Désignons par $\bar{\psi}_i$ le potentiel de g^0 dans la boule $B_{2r_i}(x_i)$ telle que $\bar{\psi}_i(x_i) = 0$, notons $\psi_i = b\bar{\psi}_i$ et posons

$$C_3 = \sup_{1 \leqslant i \leqslant N} \left[\sup_{B_{2r_i}} |\psi_i(x)| \right]. \tag{5}$$

D'après la partie (i), on a

$$u+\psi_i \leqslant C_1+C_3 \qquad \text{dans} \quad B_{2r_i}(x_i). \tag{6}$$

D'autre part, $u-C_1 \leqslant 0$ et donc, pour tout $i \in \{1, ..., N\}$, la moyenne de $u-C_1$ sur X est plus petite que sa moyenne sur la boule $B_{r_i/4}(x_i)$. Par suite, il existe $y_i \in B_{r_i/4}(x_i)$ telle que

$$u(y_i) \geqslant C_1 \left[1 - \frac{V}{\operatorname{Vol} B_{r_i/4}(x_i)} \right]. \tag{7}$$

On pose $\alpha = [2C_3 + VC_1(\min_{1 \leqslant i \leqslant N} \operatorname{Vol} B_{r_i/4}(x_i))^{-1}]^{-1}$. Ainsi, tenant compte de (6), on déduit que $\alpha[u+\psi_i - u(y_i) - \psi_i(y_i)] \leqslant 1$ et, d'après le lemme 1 où l'on prend $a=1$, on obtient,

$$\int_{B_{r_i/2}(y_i)} e^{-\alpha[u+\psi_i - u(y_i) - \psi_i(y_i)]}\, dV \leqslant Cte.$$

Enfin les inégalités (5) et (7) permettent d'écrire

$$\int_{B_{r_i/2}(y_i)} e^{-\alpha u}\, dV \leqslant Cte.$$

Le résultat s'en suit en remarquant que $B_{r_i/4}(x_i) \subset B_{r_i/2}(y_i)$ et puisque X est recouverte par les boules $B_{r_i/4}(x_i)$.

Ce lemme permet d'associer à la variété (X, g) le réel $\alpha(X)$ défini comme étant la borne supérieure des réels $\alpha > 0$ telle que (ii) soit satisfaite pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{A}$.

II. Sur les Estimées C^0 et C^1

Donnons d'abord une adaptation au cas envisagé de la proposition 11 de Aubin [4, p. 91]. Quand l'estimée C^0 ne se déduit pas facilement du principe du maximum, le lemme suivant nous permet d'élaborer une méthode d'itérations d'estimées L^p.

Lemme 3. *Soient $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application lipschitzienne et $c \in \mathbb{R}$. Il existe des réels $b_1(c), ..., b_m(c)$ dépendant continûment de c, avec $b_k(0)=1$ et $b_k(1)=(C_m^k)^{-1}$; possédant la propriété suivante. Pour toute fonction $\varphi \in C^2(X)$,*

$$\int_X [1-M(\varphi)]\, h(\varphi)\, dV$$
$$= \int_X h'(\varphi)\, \nabla^\lambda \varphi \left[\sum_{k=1}^{m} (\Omega_k(c))_\lambda \right] dV + \int_X h(\varphi)\, \nabla^\lambda \varphi \left[\sum_{k=1}^{m-1} (\Theta_k)_\lambda \right] dV, \tag{1}$$

où $\Omega_k(c)$ et Θ_k sont les 1-formes de type (1–0) définies par

$$(\Omega_k(c))_{\lambda_1} = (k!)^{-1}\, b_k(c)\, \delta^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\lambda_1 \cdots \lambda_k} \nabla_{\mu_1} \varphi (c\delta^{\lambda_2}_{\mu_2} + \nabla^{\lambda_2}_{\mu_2} \varphi) \cdots (c\delta^{\lambda_k}_{\mu_k} + \nabla^{\lambda_k}_{\mu_k} \varphi)$$

et

$$(\Theta_k)_{\lambda_1} = -(k!)^{-1}\, \delta^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\lambda_1 \cdots \lambda_k} \Bigg[T^{\nu}_{\ \nu\mu_1} \nabla^{\lambda_2}_{\mu_2} \varphi \cdots \nabla^{\lambda_k}_{\mu_k} \varphi + 2^{-1}$$
$$\times \sum_{l=2}^{k} T^{\nu}_{\ \mu_1 \mu_l} \nabla^{\lambda_2}_{\mu_2} \varphi \cdots \nabla^{\lambda_l}_{\nu} \varphi \cdots \nabla^{\lambda_k}_{\mu_k} \varphi \Bigg].$$

En particulier, quand φ est admissible, il existe un réel $p_0 > 0$ tel que, pour tout $p \geqslant p_0$,

$$\| \nabla e^{-p\varphi} \|_2^2 \leqslant mp \int_X e^{-2p\varphi} M(\varphi)\, dV. \tag{2}$$

Démonstration. Par un argument de densité, on se ramène au cas où $h \in C^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in C^3(X)$. Le développement du déterminant définissant $M(\varphi)$ donne

$$M(\varphi) = 1 + \sum_{k=1}^{m} (k!)^{-1}\, \delta^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\lambda_1 \cdots \lambda_k} \nabla^{\lambda_1}_{\mu_1} \varphi \cdots \nabla^{\lambda_k}_{\mu_k} \varphi \equiv 1 + \sum_{k=1}^{m} A_k.$$

Ainsi, compte tenu de l'antisymétrie du tenseur de Kronecker et de la relation tensorielle

$$\nabla^{\lambda_l}_{\ \mu_1 \mu_l} \varphi - \nabla^{\lambda_l}_{\ \mu_l \mu_1} \varphi = T^{\nu}_{\ \mu_l \mu_1} \nabla^{\lambda_l}_{\nu} \varphi,$$

l'égalité intégrale (I–4) permet de montrer que

$$\int_X A_k h(\varphi)\, dV = -\int_X h'(\varphi)\, \nabla^{\lambda_1} \varphi (\Omega_k(0))_{\lambda_1}\, dV - \int_X h(\varphi)\, \nabla^{\lambda_1} \varphi (\Theta_k)_{\lambda_1}\, dV,$$

c'est-à-dire l'égalité (1) quand $c = 0$.

Dans un repère g-orthonormé en P et diagonalisant la matrice $[\partial_{\lambda\bar{\mu}}\varphi(P)]_{\lambda,\mu}$, notons $a_\lambda = \partial_{\lambda\bar{\lambda}}\varphi$, on a alors

$$I \equiv \sum_{k=1}^{m} \nabla^\lambda \varphi(\Omega_k(0))_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{m} J_\lambda(\varphi)\,|\partial_\lambda \varphi|^2,$$

où

$$J_\lambda(\varphi) = 1 + \sum_{\lambda_1 < \cdots < \lambda_l,\, \lambda_i \neq \lambda} \frac{1}{k+1}\, a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_k}$$

est une combinaison linéaire des fonctions symétriques élémentaires des variables $(a_\mu)_{\mu \neq \lambda}$. Quel que soit $c \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule de Taylor, on écrit $J_\lambda(\varphi)$ comme combinaison linéaires des fonctions symétriques élémentaires des variables $(c + a_\mu)_{\mu \neq \lambda}$. On met ainsi I sous la forme $\sum_{k=1}^{m} \nabla^\lambda \varphi(\Omega_k(c))_\lambda$.

Pour établir les valeurs des réels b_k quand $c = 1$, on peut s'inspirer des calculs menés dans [6].

La seconde partie du lemme est obtenue en prenant $c = 1$ et $h(t) = -e^{-2pt}$, où $p \geqslant p_0$ est un réel stictement positif assez grand. Dans ces conditions, pour tout $k \in \{1, ..., m\}$, on a

$$0 < U_k \equiv \int_X h'(\varphi)\, \nabla^\lambda \varphi[\Omega_k(1)]_\lambda\, dV.$$

On minore alors le second membre de (1) par une combinaison linéaire des $(U_k)_{k=1,...,m-1}$; les coefficients dépendent polynômialement de p. En fait, il est possible de choisir $p_0 > 0$ assez grand telle que, pour tout $p \geqslant p_0$, on ait

$$\begin{aligned}\int_X [M(\varphi) - 1]\, e^{-2p\varphi}\, dV &\geqslant 2^{-1} \sum_{k=1}^{m-1} U_k - 4^{-1} \int_X e^{-2p\varphi}\, dV\\ &\geqslant \frac{U_1}{2} - 4^{-1} \int_X e^{-2p\varphi}\, dV\end{aligned}$$

et par suite (2). Tous les calculs sont détaillés dans [7, pp. 352–353, 380–383].

Lemme 4. *Soit ν un réel non nul et $F \in C^\infty(X_{2m} \times \mathbb{R})$ une fonction partout strictement positive telle que $0 < A^{-1} \leqslant F(x, t) \leqslant Ae^{a\,|t|}$ pour tout couple $(x, t) \in X \times\,]-\infty, t_0]$, où A et t_0 sont des constantes avec $a \in\,]0, \alpha(X)/m[$. Sous l'hypothèse $\mathscr{H}$ sur la métrique g, toute solution de l'équation*

$$M(\varphi) = e^{\nu\tilde{\varphi}}[F(x, \varphi - \tilde{\varphi})]^s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1, \tag{3}$$

est estimée a priori dans $C^0(X)$.

Démonstration. Il s'agit d'estimer $\|\psi\|_\infty$, où $\psi = \varphi - \tilde{\varphi}$. Tout d'abord, d'après la première partie du Lemme 2, on voit que $\psi \leqslant C_1$ et donc en se plaçant au maximum de φ, tenant compte de (3) et la minoration $A^{-1} \leqslant F(x, t)$, on obtient une majoration a priori de $v\tilde{\varphi}$. Il en résulte que

$$M(\psi) = e^{v\tilde{\varphi}}[F(x, \psi)]^s \leqslant C_2 e^{a|\psi|} \leqslant C_3 e^{-a\psi},$$

où la constante C_3 dépend de A, a, C_1 ainsi que d'un majorant de $v\tilde{\varphi}$.

D'autre part, l'application de l'inégalité (2) montre l'existence d'une constante positive C_4 telle que pour tout $p \geqslant p_0$, assez grand, on ait

$$\|\nabla e^{-p\psi}\|_2^2 \leqslant mpC_4 \int_X e^{-(a+2p)\psi}\, dV. \tag{4}$$

L'inégalité de Sobolev, $-\|\nabla e^{-p\psi}\|_2^2 + C_5 \|e^{-p\psi}\|_{2\lambda}^2 \leqslant \|e^{-p\psi}\|_2^2$, où $\lambda = m/(m-1)$, jointe à l'inégalité (4) donne

$$\|\nabla e^{-p\psi}\|_2^2 + C_5 \|e^{-p\psi}\|_{2\lambda}^2 \leqslant (1 + pC_6) \int_X e^{-(a+2p)\psi}\, dV. \tag{5}$$

On choisit alors un réel b dans l'intervalle $]a, \alpha(X)/m[$; d'où puisque $mb < \alpha(X)$,

$$\|e^{-\psi}\|_{mb}^b \leqslant C_7. \tag{6}$$

Soient $\varepsilon \in]0, a/b[$ un réel précisé ultérieurement et

$$C_8 = \sup_{t \leqslant t_0} (e^{-at} - \varepsilon e^{-bt}) = [(a/b)^{a/(b-a)} - (a/b)^{b/(b-a)}]\, \varepsilon^{a/(a-b)}.$$

Par Hölder, compte tenu de (6), on aura

$$\int_X e^{-(a+2p)\psi}\, dV \leqslant C_9 \|e^{-p\psi}\|_2^2 + \varepsilon C_7 \|e^{-p\psi}\|_{2\lambda}^\lambda.$$

Prenons $\varepsilon = C_5[C_7(1 + pC_6)]^{-1}$, tenant compte de la valeur de C_8, (5) devient alors

$$\|\nabla e^{-p\psi}\|_2^2 \leqslant C_{10} p^{b/(b-a)} \|e^{-p\psi}\|_2^2. \tag{7}$$

Or, d'après la première partie du Lemme 2, ψ est a priori majorée, on peut donc écrire,

$$\|\psi\|_1 = \int_X |\psi|\, dV \leqslant \int_X (2C_1 - \psi)\, dV \leqslant 2C_1 V.$$

Ainsi, en notant $u = e^{-2\psi}$, on en déduit compte tenu de (7), par l'argument de Yau [11, p. 358] que $\|u\|_p \leqslant C_{11}(p)$. Puis à l'aide de l'inégalité de Sobolev et de (7), on montre l'existence d'une constante positive C_{12} tel que, si $p \geqslant 1$, on ait:

$$\|u\|_{\lambda p}^{p} \leqslant C_{12} p^{b/(b-a)} \|u\|_{p}^{p},$$

ce qui implique par itération sur l'entier $k \geqslant 0$, l'existence d'une constante positive C_{13} telle que

$$\|u\|_{\lambda^{k+1}} \leqslant C_{12}^{(\sum_{l=0}^{k} \lambda^{-l})} \lambda^{b/(b-a) \sum_{l=1}^{k} l\lambda^{-l}} \|u\|_1 \leqslant C_{13}.$$

Faisons tendre k vers l'infini, on déduit que $u \leqslant C_{13}$ et par suite $\psi \geqslant -2^{-1} \operatorname{Log} C_{13}$. Ce qui nous permet de conclure puisqu'alors ψ étant estimée a priori dans C^0; en se plaçant en un point où φ atteint son maximum, on prouve, compte tenu de (3), que $v\tilde{\varphi} \geqslant C_{14}$. Ainsi $|v\tilde{\varphi}| \leqslant C_{15}$ et $\|\varphi\|_\infty \leqslant C_{16}$.

LEMME 5. *Soient v un réel non nul et $F \in C^\infty(TX \times \mathbb{R})$ une fonction partout strictement positive telle que $0 < A^{-1} \leqslant F(x, p; t) \leqslant A e^{a|t|}(1 + |p|^{2b})$ pour tout $(x, p; t) \in TX \times]-\infty, t_0]$, où A et t_0 sont des constantes, $a > 0$ et $0 < b < 1$. Sous l'hypothèse $\mathscr{H}$ sur la métrique g, toute solution φ d'une équation de la forme*

$$M(\varphi) = e^{v\tilde{\varphi}}[F(x, \nabla\varphi; \varphi - \tilde{\varphi})]^s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1, \tag{8}$$

est estimée a priori dans $C^0(X)$ quand $a/(1-b) < \alpha(X)/m$.

Démonstration. En se plaçant au maximum de φ en un point $P \in X$, en remarquant que $(\nabla\varphi)(P) = 0$ et en utilisant la minoration $A^{-1} \leqslant F(x, p; t)$, on obtient une majoration a priori de $v\tilde{\varphi}$. Or, d'après le lemme 2(i), on a $\psi = \varphi - \tilde{\varphi} \leqslant Cte$; il en résulte que

$$M(\psi) = e^{v\tilde{\varphi}}[F(x, \nabla\psi; \psi)]^s \leqslant C_1 e^{-a\psi}[1 + |\nabla\psi|^{2b}].$$

L'application de la seconde partie du Lemme 3 montre donc l'existence d'une constant positve C_2 telle que pour tout $p \geqslant p_0$, assez grand,

$$\int_X |\nabla e^{-p\psi}|^2 \, dV \leqslant C_2 p \int_X e^{-(a+2p)\psi}(1 + |\nabla\psi|^{2b}) \, dV. \tag{9}$$

Or, on sait, d'après l'inégalité de Young, que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$e^{-a\psi} |\psi|^{2b} \leqslant \varepsilon^{b/(b-a)} e^{-\delta\psi} + \varepsilon |\nabla\psi|^2,$$

où $\delta = a/(1-b) < \alpha(X)/m$. Compte tenu du fait que $e^{-a\psi} \leqslant C_3 e^{-\delta\psi}$, l'inégalité (9) devient:

$$2 \, \|\nabla e^{-p\psi}\|_2^2 \leqslant C_2 p[C_3 + \varepsilon^{b/(b-1)}] \int_X e^{-(\delta+2p)\psi} \, dV + C_2 \varepsilon p^{-1} \, \|\nabla e^{-p\psi}\|_2^2.$$

Posons $\varepsilon = p_0(2C_2)^{-1}$, on en déduit l'existence d'une constante positive C_4 telle que

$$\tfrac{3}{2} \, \|\nabla e^{-p\psi}\|_2^2 \leqslant C_4 p \int_X e^{-(\delta+2p)\psi} \, dV,$$

l'analogue de (7), ce qui permet d'opérer comme au Lemme 4.

LEMME 6. *Soit $F \in C^\infty(TX \times \mathbb{R})$ une fonction vérifiant les hypothèses du Lemme 5. On suppose en plus que*

$$|\nabla F|, \left| p^c \frac{\partial F}{\partial p^c} \right| \leqslant CteF. \tag{1}$$

∇ désigne le gradient pour une métrique hermitienne et (p^c) désignent les coordonées naturelles dans les fibres de TX. Soit $\mathscr{B} \subset C^3$ un ensemble de solutions admissibles de l'équation

$$M(\varphi) = F(x, \nabla\varphi; \varphi). \tag{2}$$

Alors $\mathscr{B}$ est borné dans $C^1(X)$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathscr{B}$. Considérons la fonctionnelle

$$\Gamma(\varphi) = |\nabla\varphi|^2 \exp[e^{k(c-\varphi)}], \qquad \text{où} \quad k > 0, \, c = \sup_{\varphi \in \mathscr{B}} \|\varphi\|_\infty. \tag{3}$$

En un point P où $\Gamma(\varphi)$ atteint son maximum, supposons que $|\nabla\varphi|(P) \geqslant 1$. Ainsi,

$$\frac{\nabla_\alpha |\nabla\varphi|^2}{|\nabla\varphi|^2} - k e^{k(c-\varphi)} \nabla_\alpha \varphi = 0, \tag{4}$$

et donc en écrivant que le laplacien de Log $\Gamma(\varphi)$ dans la métrique déformée $g' = g + i\partial\bar{\partial}\varphi$ est non négatif en P; on obtient

$$0 \leqslant \frac{\Delta' \, |\nabla\varphi|^2}{|\nabla\varphi|^2} + \frac{|\nabla' \, |\nabla\varphi|^2 \, |^2}{|\nabla\varphi|^4} - k e^{k(c-\varphi)} (\Delta'\varphi - k \, |\nabla'\varphi|^2). \tag{5}$$

Il convient de majorer convenablement les deux premiers termes du membre de droite de (5).

Tout d'abord, en écrivant que $|\nabla' \operatorname{Log} \Gamma(\varphi)|^2 (P) = 0$, on obtient

$$\frac{|\nabla' \mid \nabla\varphi|^2 \mid^2}{|\nabla\varphi|^4} = -k^2 e^{k(c-\varphi)} |\nabla'\varphi|^2 + \frac{k e^{k(c-\varphi)}}{|\nabla\varphi|^2} (g'^{\alpha\bar{\beta}} \nabla_\alpha |\nabla\varphi|^2 \nabla_{\bar{\beta}}\varphi + \text{conj.}). \tag{6}$$

Développons $\nabla |\nabla\varphi|^2$, compte tenu des relations $\nabla_{\alpha\bar{\mu}}\varphi = g'_{\alpha\bar{\mu}} - g_{\alpha\bar{\mu}}$ et $g'^{\alpha\bar{\beta}} g'_{\alpha\bar{\mu}} = \delta^{\beta}_{\mu}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}(g'^{\alpha\bar{\beta}} \nabla_\alpha |\nabla\varphi|^2 \nabla_{\bar{\beta}}\varphi + \text{conj.})\\ = 2(|\nabla\varphi|^2 - |\nabla'\varphi|^2) + (g'^{\alpha\bar{\beta}} g^{\lambda\bar{\mu}} \nabla_{\alpha\lambda}\varphi \nabla_{\bar{\mu}}\varphi \nabla_{\bar{\beta}}\varphi + \text{conj.})\end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Cauchy, il vient,

$$(g'^{\alpha\bar{\beta}} g^{\lambda\bar{\mu}} \nabla_{\alpha\lambda}\varphi \nabla_{\bar{\mu}}\varphi \nabla_{\bar{\beta}}\varphi + \text{con.}) \leqslant \frac{E_1}{k e^{k(c-\varphi)}} |\nabla\varphi|^2 |\nabla'\varphi|^2,$$

où

$$E_1 = g'^{\alpha\bar{\beta}} g^{\lambda\bar{\mu}} (\nabla_{\alpha\lambda}\varphi \nabla_{\bar{\beta}\bar{\mu}}\varphi + \nabla_{\lambda\bar{\beta}}\varphi \nabla_{\alpha\bar{\mu}}\varphi). \tag{7}$$

Ainsi, l'inégalité (6) donne la majoration suivante:

$$\frac{|\nabla' \mid \nabla\varphi|^2 \mid^2}{|\nabla\varphi|^4} \leqslant \frac{E_1}{|\nabla\varphi|^2} + 2k e^{k(c-\varphi)}. \tag{8}$$

D'autre part, les relations $\nabla_a \operatorname{Log} F = g'^{\alpha\bar{\beta}} \nabla_{a\alpha\bar{\beta}}\varphi$, où $a \in \{1, ..., m, \bar{1}, ..., \bar{m}\}$, obtenues par dérivation de (2), et les relations

$$\nabla_{\lambda\alpha\bar{\beta}}\varphi - \nabla_{\alpha\bar{\beta}\lambda}\varphi = -T^{\nu}_{\lambda\alpha} \nabla_{\nu\bar{\beta}}\varphi \tag{9}$$

et

$$\nabla_{\bar{\mu}\alpha\bar{\beta}\bar{\mu}}\varphi - \nabla_{\alpha\bar{\beta}\bar{\mu}}\varphi = -T^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}\bar{\beta}} \nabla_{\alpha\bar{\nu}}\varphi - (R^{\bar{\nu}}_{\bar{\beta}\mu\alpha} + \nabla_\alpha T^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}\bar{\beta}}) \nabla_{\bar{\nu}}\varphi \tag{10}$$

déduites de (I-1), permettent d'écrire $\Delta' |\nabla\varphi|^2$ sous la forme

$$\Delta' |\nabla\varphi|^2 = -(\nabla^\lambda\varphi \nabla_\lambda \operatorname{Log} F + \text{conj.}) - E_1 - E_2, \tag{11}$$

où E_1 est défini par (7) et

$$E_2 = (g'^{\alpha\bar{\beta}} T^{\nu}_{\lambda\alpha} \nabla^\lambda\varphi \nabla_{\nu\bar{\beta}}\varphi + \text{conj.}) + g'^{\alpha\bar{\beta}} (R^{\bar{\nu}}_{\bar{\beta}\mu\alpha} + \nabla_\alpha T^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}\bar{\beta}}) \nabla_{\bar{\nu}}\varphi \nabla^{\bar{\mu}}\varphi.$$

Observons à présent qu'en écrivant $\nabla_{\nu\bar{\beta}}\varphi = g'_{\nu\bar{\beta}} - g_{\nu\bar{\beta}}$, on établit l'existence d'une constante positive C_2 ne dépendant que de (X, g) et d'une estimée C^0 de φ telle que

$$|E_2| \leqslant C_2\,|\nabla\varphi|^2\,(1 + g'^{\alpha\bar{\beta}} g_{\alpha\bar{\beta}}). \tag{12}$$

D'autre part, tenant compte de (1) et du fait que $|\nabla\varphi|(P) \geqslant 1$, le développement des termes en F dans (11) permet d'écrire

$$-(\nabla^{\lambda}\varphi\nabla_{\lambda}\,\mathrm{Log}\,F(x, \nabla\varphi; \varphi) + \mathrm{conj.}) \leqslant C_3\,|\nabla\varphi|^2 - \left(\frac{\partial\,\mathrm{Log}\,F}{\partial p^{\alpha}}\,\nabla_{\alpha}\,|\nabla\varphi|^2 + \mathrm{conj.}\right), \tag{13}$$

on C_3 ne dépend que de la constante dans (1) et du maximum sur X de la norme du tenseur de Torsion $\mathscr{T}$.

En reportant (12) et (13) dans (11) et puisque (1) et (4) impliquent que

$$2\left|\frac{\partial\,\mathrm{Log}\,F}{\partial p^{\alpha}}\,\nabla_{\alpha}\,|\nabla\varphi|^2\right| \leqslant C_4 k e^{k(c-\varphi)}\,|\nabla\varphi|^2,$$

on obtient

$$\frac{\Delta'\,|\nabla\varphi|^2}{|\nabla\varphi|^2} \leqslant -\frac{E_1}{|\nabla\varphi|^2} + C_2(1 + g'^{\alpha\bar{\beta}} g_{\alpha\bar{\beta}}) + C_3 + C_4 k e^{k(c-\varphi)}. \tag{14}$$

Reportons (8) et (14) dans (5), on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leqslant [\,C_2 - k e^{k(c-\varphi)}](m + \Delta'\varphi) - k^2 e^{k(c-\varphi)}\,|\nabla'\varphi|^2 \\ + (2 + m + C_4)\,k e^{k(c-\varphi)} + C_2 + C_3. \end{aligned}$$

C'est-à-dire, en tenant compte du fait que $e^{k(c-\varphi)} \geqslant 1$,

$$0 \leqslant (C_2 - k)(m + \Delta'\varphi) - k^2\,|\nabla'\varphi|^2 + C_5,$$

où $C_5 = C_2 + C_3 + (2 + m + C_4)\,k e^{2k\,\|\varphi\|_\infty}$. Prenons $k = C_2 + 1$; il s'en suit que

$$(m + \Delta'\varphi)(P) \leqslant C_5, \qquad |\nabla'\varphi|^2\,(P) \leqslant C_5 k^{-2}. \tag{15}$$

Or, d'après l'inégalité arithmético–géométrique, on vérifie, en se plaçant dans un repère adapté à φ, que

$$m - \Delta\varphi \leqslant m M(\varphi)\left[\frac{m + \Delta'\varphi}{m-1}\right]^{m-1},$$

et comme φ vérifie (2), tenant compte de l'estimée C^0 déjà acquise et l'hypothèse de croissance sur F, la première inégalité de (15) implique l'existence d'une constante positive C_6 telle que

$$(m - \Delta\varphi)(P) \leqslant C_6\, |\nabla\varphi|^{2b}.$$

Enfin l'inégalité $|\nabla\varphi|^2 \leqslant (m - \Delta\varphi)\, |\nabla'\varphi|^2$ combinée avec la seconde inégalité de (15) permet d'affirmer que la norme du gradient de φ est estimée a priori en P puisque $b < 1$, et donc en écrivant que, partout dans X, $\Gamma(\varphi) \leqslant \Gamma(\varphi)(P)$, on conclut que $|\nabla\varphi|^2 \leqslant |\nabla\varphi|^2\,(P) \exp[e^{k\, \|c-\varphi\|_\infty}]$. Le lemme en résulte.

III. Estimation a priori dans $C^{3,\alpha}$.

Lemme 7. *Soient $F \in C^2(TX \times \mathbb{R})$, C_0 et C_1 deux constantes positives. Soit $\mathscr{B}$ un ensemble de solutions admissibles de l'équation*

$$\operatorname{Log} M(\varphi) = F(x, \nabla\varphi; \varphi), \tag{1}$$

telles que

$$\sup_{\varphi \in \mathscr{B}} \|\varphi\|_{C^0(X)} \leqslant C_0, \qquad \sup_{\varphi \in \mathscr{B}} \|\nabla\varphi\|_{C^0(X)} \leqslant C. \tag{2}$$

Il existe des constantes positives C_2, C'_2, a et b telles que, si $\varphi \in \mathscr{B}$, on ait:

$$0 < C_2 < m - \Delta\varphi \leqslant C'_2, \qquad ag \leqslant g'_\varphi \leqslant bg,$$

où g'_φ désigne la métrique déformée $g + i\partial\bar{\partial}\varphi$. Notant K le compact de $TX \times \mathbb{R}$ décrit par les triplets $(x, p; t)$ vérifiant $x \in X$, $|p| \leqslant C_1$ et $|t| \leqslant C_0$. C'_2, a et b dépendent de C_0, C_1, $\|F\|_{C^2(K)}$ ainsi que des maximums sur X des normes des tenseurs $\mathscr{R}$, $\mathscr{T}$ et $\nabla\mathscr{T}$; C_2 n'est fonction que de $\inf_K F$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathscr{B}$. D'après l'admissibilité de φ et l'inégalité arithmético–géométrique, on montre, en se plaçant dans un repère adapté à φ, que

$$m - \Delta\varphi = g^{\lambda\bar{\mu}} g'_{\lambda\bar{\mu}} = \sum_{\lambda=1}^{m} (1 + \partial_{\lambda\bar{\lambda}}\varphi) \geqslant m[M(\varphi)]^{1/m} = m \exp \frac{F(x, \nabla\varphi; \varphi)}{m}, \tag{3}$$

et donc d'après les estimées (2) et la continuité de F sur le compact K,

$$0 < C_2 \leqslant m - \Delta\varphi, \qquad \left|\frac{\Delta\varphi}{m - \Delta\varphi}\right| \leqslant C''_2 = 1 + mC_2^{-1}. \tag{4}$$

A présent, il s'agit de majorer a priori $m-\Delta\varphi$. Pour cela, il suffit d'obtenir une majoration de $g'^{\lambda\bar{\mu}}g_{\lambda\bar{\mu}}$ en tout point P où la fonctionnelle

$$\Gamma(\varphi)=\mathrm{Log}(m-\Delta\varphi)-k\varphi+l\,|\nabla\varphi|^2$$

atteint son maximum; k et l sont deux réels strictement positifs précisés ultérieurement.

Ecrivons que le laplacien de $\Gamma(\varphi)$ dans la métrique déformée g' est non négatif:

$$\begin{aligned}0\leqslant{}&(m-\Delta\varphi)^{-1}\,\Delta'(m-\Delta\varphi)+(m-\Delta\varphi)^{-2}\,g'^{\alpha\bar{\beta}}\nabla_\alpha(m-\Delta\varphi)\\&\times\nabla_{\bar{\beta}}(m-\Delta\varphi)-k\Delta'\varphi+l\Delta'\,|\nabla\varphi|^2.\end{aligned}\tag{5}$$

En dérivant deux fois l'équation (1) satisfaite par φ, on exprime $\Delta'(m-\Delta\varphi)$ à l'aide des dérivées covariantes de φ d'ordre $\leqslant 3$. En effet,

$$\nabla_\lambda F=g'^{\alpha\bar{\beta}}\nabla_{\lambda\alpha\bar{\beta}}\varphi$$

et

$$-\Delta F=g^{\lambda\bar{\mu}}g'^{\alpha\bar{\beta}}\nabla_{\bar{\mu}\lambda}\nabla_{\alpha\bar{\beta}}\varphi-g'^{\alpha\bar{\sigma}}g'^{\rho\bar{\beta}}g^{\lambda\bar{\mu}}\nabla_{\bar{\mu}\rho\bar{\sigma}}\varphi\nabla_{\lambda\alpha\bar{\beta}}\varphi.$$

Donc

$$\begin{aligned}\Delta'(m-\Delta\varphi)&=-g'^{\alpha\bar{\beta}}g^{\lambda\bar{\mu}}\nabla_{\alpha\bar{\beta}}\nabla_{\lambda\bar{\mu}}\varphi\\&=-g'^{\alpha\bar{\beta}}g^{\lambda\bar{\mu}}\nabla_{\bar{\mu}\lambda}\nabla_{\alpha\bar{\beta}}\varphi-g^{\lambda\bar{\mu}}g'^{\alpha\bar{\beta}}(\nabla_{\alpha\bar{\beta}\lambda\bar{\mu}}\varphi-\nabla_{\lambda\bar{\mu}\alpha\bar{\beta}}\varphi)\\&=-g'^{\alpha\bar{\sigma}}g'^{\rho\bar{\beta}}\nabla^{\lambda}_{\rho\bar{\sigma}}\varphi\nabla_{\lambda\alpha\bar{\beta}}\varphi-g^{\lambda\bar{\mu}}g'^{\alpha\bar{\beta}}(\nabla_{\alpha\bar{\beta}\lambda\bar{\mu}}\varphi-\nabla_{\lambda\bar{\mu}\alpha\bar{\beta}}\varphi)+\Delta F.\end{aligned}\tag{6}$$

Par permutation des dérivées covariantes, tenant compte des commutations (9) et (10) de la preuve du Lemme 6, on obtient

$$\begin{aligned}\nabla_{\alpha\bar{\beta}\bar{\mu}\lambda}\varphi-\nabla_{\bar{\mu}\lambda\alpha\bar{\beta}}\varphi={}&T^{\gamma}_{\lambda\alpha}\nabla_{\bar{\mu}\gamma\bar{\beta}}\varphi+T^{\bar{\gamma}}_{\bar{\mu}\bar{\beta}}\nabla_{\lambda\bar{\gamma}\alpha}\varphi+(R^{\gamma}_{\lambda\bar{\mu}\alpha}+\nabla_{\bar{\mu}}T^{\gamma}_{\lambda\alpha})\,\nabla_{\gamma\bar{\beta}}\varphi\\&+(R^{\bar{\gamma}}_{\overline{\beta\mu}\alpha}+\nabla_\alpha T^{\bar{\gamma}}_{\overline{\mu\beta}})\,\nabla_{\lambda\bar{\gamma}}\varphi.\end{aligned}\tag{7}$$

Saturons l'égalité (7) par $g'^{\alpha\bar{\beta}}g^{\lambda\bar{\mu}}$ et reportons dans (6), la relation qui en résulte donne l'expression cherchée de $\Delta'(m-\Delta\varphi)$,

$$\Delta'(m-\Delta\varphi)=-g'^{\alpha\bar{\beta}}g'^{\rho\bar{\sigma}}\nabla^{\lambda}_{\rho\bar{\beta}}\varphi\nabla_{\lambda\alpha\bar{\sigma}}\varphi-(g'^{\alpha\bar{\beta}}T^{\gamma}_{\lambda\alpha}\nabla^{\gamma}_{\gamma\bar{\beta}}\varphi+\mathrm{conj.})+G_2+\Delta F,\tag{8}$$

où G_2 est défini par

$$\begin{aligned}G_2={}&-g'^{\alpha\bar{\beta}}\,[(R^{\nu\bar{\mu}}_{\bar{\mu}\alpha}+\nabla^{\lambda}T^{\nu}_{\lambda\alpha})\,\nabla_{\nu\bar{\beta}}\varphi+(R^{\bar{\nu}}_{\overline{\beta\mu}\alpha}+\nabla_\alpha T^{\bar{\nu}}_{\overline{\mu\beta}})\,\nabla^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}}\varphi]\\&+g'^{\alpha\bar{\beta}}g^{\lambda\bar{\mu}}T^{\nu}_{\alpha\lambda}T^{\bar{\gamma}}_{\overline{\mu\beta}}\nabla_{\nu\bar{\gamma}}\varphi\end{aligned}$$

et vérifie la relation

$$|G_2| \leqslant C_3(m-\Delta\varphi)(1+g'^{\alpha\bar\beta}g_{\alpha\bar\beta}); \tag{9}$$

la constante C_3 n'est fonction que des maximums sur X des normes des tenseurs $\mathscr{R}$, $\mathscr{T}$, et $\nabla\mathscr{T}$.

L'inégalité (5) s'écrit donc, compte tenu de (8), sous la forme

$$(m-\Delta\varphi)^{-1}\, G_1 \leqslant (m-\Delta\varphi)^{-1}\, G_2 + G_3, \tag{10}$$

où

$$\begin{aligned} G_1 = {} & g'^{\alpha\bar\sigma} g'^{\rho\bar\beta} g^{\lambda\bar\mu} \nabla_{\bar\mu\rho\bar\sigma}\varphi \nabla_{\lambda\alpha\bar\beta}\varphi \\ & + (g'^{\alpha\bar\beta} T^{\gamma}_{\lambda\alpha} \nabla^{\lambda}_{\gamma\bar\beta}\varphi + \text{conj.}) - (m-\Delta\varphi)^{-1}\, |\nabla'(m-\Delta\varphi)|^2 \end{aligned}$$

et

$$G_3 = (m-\Delta\varphi)^{-1}\, \Delta F - k\Delta'\varphi + l\Delta'\, |\nabla\varphi|^2. \tag{11}$$

Dans le cas kählérien on remarque que le terme G_1 est positif ce qui a pour effet de simplifier les calculs; suivons donc le raisonnement qui a été proposé. On développe le carré K qui suit

$$\begin{aligned} 0 \leqslant K = g^{\lambda\bar\mu} g'^{\alpha\bar\sigma} g'^{\rho\bar\beta} & [\nabla_{\lambda\alpha\bar\beta}\varphi - (m-\Delta\varphi)\, \nabla_\alpha(m-\Delta\varphi)\, g'_{\lambda\bar\beta} + C_{\lambda\bar\beta\alpha}] \\ & \times [\nabla_{\overline{\mu\sigma}\rho}\varphi - (m-\Delta\varphi)^{-1}\, \nabla_{\bar\sigma}(m-\Delta\varphi)\, g'_{\rho\bar\mu} + C_{\bar\mu\rho\bar\sigma}], \end{aligned}$$

où $C_{\lambda\bar\beta\alpha} = T^{\delta}_{\lambda\alpha} g'_{\delta\bar\beta}$, on trouve alors

$$G_1 = K + (m-\Delta\varphi)^{-1}\, [T^{\lambda}_{\lambda\alpha} g'^{\alpha\bar\sigma} \nabla_{\bar\sigma}(m-\Delta\varphi) + \text{conj.}] - g^{\lambda\bar\mu} g'^{\alpha\bar\sigma} g'_{\rho\bar\gamma} T^{\rho}_{\lambda\alpha} T^{\bar\gamma}_{\overline{\mu\sigma}}.$$

Or, au point P, où $\Gamma(\varphi)$ est stationnaire, on peut écrire d'après la définition de $\Gamma(\varphi)$,

$$(m-\Delta\varphi)^{-1}\, \nabla_\sigma(m-\Delta\varphi) = k\nabla_\sigma\varphi - l\nabla_\sigma\, |\nabla\varphi|^2. \tag{12}$$

Donc, en reportant dans l'expression ci-dessus de G_1, on obtient

$$G_1 = K + [T^{\lambda}_{\lambda\alpha} g'^{\alpha\bar\sigma} \nabla_{\bar\sigma}(k\varphi - l\, |\nabla\varphi|^2) + \text{conj.}] - g^{\lambda\bar\mu} g'^{\alpha\bar\sigma} g'_{\rho\bar\gamma} T^{\rho}_{\lambda\alpha} T^{\bar\gamma}_{\overline{\mu\sigma}}. \tag{13}$$

En se plaçant dans un repère adapté à φ, on vérifie successivement que

$$\begin{aligned} g^{\lambda\bar\mu} g'^{\alpha\bar\sigma} g'_{\rho\bar\gamma} T^{\rho}_{\lambda\alpha} T^{\bar\gamma}_{\overline{\mu\sigma}} &= \sum_{\alpha,\,\beta,\,\gamma} (1+\partial_{\beta\bar\beta}\varphi(1+\partial_{\gamma\bar\gamma}\varphi)^{-1}\, |T^{\beta}_{\alpha\gamma}|^2 \\ &\leqslant \|\mathscr{T}\|^2\, (m-\Delta\varphi)\, g'^{\alpha\bar\beta} g_{\alpha\bar\beta}, \\ |T^{\lambda}_{\lambda\alpha} g'^{\alpha\bar\sigma} \nabla_{\bar\sigma}\varphi| &= \sum_{\lambda,\,\alpha} |T^{\lambda}_{\lambda\alpha}|\, |\nabla_{\alpha\varphi}|\, (1+\partial_{\alpha\bar\alpha}\varphi)^{-1} \\ &\leqslant (m-1)\, \|\mathscr{T}\|\, |\nabla\varphi|\, g'^{\alpha\bar\beta} g_{\alpha\bar\beta} \leqslant C_4 g'^{\alpha\bar\beta} g_{\alpha\bar\beta} \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
|T^{\lambda}_{\lambda\alpha} g^{\alpha\bar{\sigma}} \nabla_{\bar{\sigma}}|^2| &= \left| \sum_{\lambda,\,\alpha,\,\mu} T^{\lambda}_{\lambda\alpha} (1+\partial_{\alpha\bar{\alpha}}\varphi)^{-1} (\partial_{\mu\bar{\alpha}}\varphi \partial_{\bar{\mu}}\varphi + \partial_{\mu}\varphi \partial_{\overline{\alpha\mu}}\varphi) \right| \\
&\leqslant (m-1)\, |\nabla\varphi|\, \|\mathscr{T}\| \sum_{\alpha,\,\mu} (1+\partial_{\alpha\bar{\alpha}}\varphi)^{-1} \\
&\quad \times (2\varepsilon + \varepsilon^{-1} |\partial_{\mu\bar{\alpha}}\varphi|^2 + \varepsilon^{-1} |\partial_{\overline{\alpha\mu}}\varphi|^2) \\
&\leqslant C_4(\varepsilon^{-1} E_1 + 2\varepsilon g'^{\alpha\bar{\beta}} g_{\alpha\bar{\beta}}).
\end{aligned}
$$

La dernière inégalité se déduisant du fait que $|\partial_{\mu\bar{\alpha}}\varphi| \leqslant \varepsilon + \varepsilon^{-1} |\partial_{\mu\bar{\alpha}}\varphi|^2$ et $|\partial_{\overline{\alpha\mu}}\varphi| \leqslant \varepsilon + \varepsilon^{-1} |\partial_{\overline{\alpha\mu}}\varphi|^2$ pour tout réel $\varepsilon > 0$; le terme E_1 est donné par la définition (7) de la preuve du Lemme 6, et $C_4 = (m-1)\, \|\mathscr{T}\|_{\infty} \sup_{\varphi \in \mathscr{B}} \|\nabla\varphi\|_{C^0(X)}$ est une constante contrôlée d'après (2).

A présent, on utilise la positivité du terme K pour minorer l'expression (13) de G_1,

$$
G_1 \geqslant -G_5[((m-\Delta\varphi) + k + \varepsilon l)\, g'^{\alpha\bar{\beta}} g_{\alpha\bar{\beta}} + l\varepsilon^{-1} E_1], \tag{14}
$$

où $C_5 = \max(\|\mathscr{T}\|_{\infty}, 2C_4)$.

Poursuivons par l'étude du terme G_3 défini par (11). Tenant compte de l'estimée C^1, déjà acquise, et des relations (11), (12), et (13) de la preuve du Lemme 6, on peut écrire

$$
\Delta' |\nabla\varphi|^2 \leqslant -\left(\frac{\partial F}{\partial p^{\alpha}} \nabla_{\alpha} |\nabla\varphi|^2 + \text{conj.}\right) + C_6(1 + g'^{\alpha\bar{\beta}} g_{\alpha\bar{\beta}}) - E_1. \tag{15}
$$

D'autre part, d'après (4), le développement de $\Delta[F(x, \nabla\varphi; \varphi)]$ donne l'existence de deux constantes positives C_7 et C_8 telle que

$$
\begin{aligned}
\Delta F \leqslant C_7(m-\Delta\varphi) &+ C_8 g^{\alpha\bar{\beta}} g^{\lambda\bar{\mu}} (\nabla_{\alpha\lambda}\varphi \nabla_{\overline{\beta\mu}}\varphi + \nabla_{\lambda\bar{\beta}} \nabla_{\alpha\bar{\mu}}\varphi) \\
&- \left(\frac{\partial F}{\partial p^{\alpha}} \nabla_{\alpha}(m-\Delta\varphi) + \text{conj.}\right).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Or

$$
(m-\Delta\varphi)^{-1} g^{\alpha\bar{\beta}} g^{\lambda\bar{\mu}} (\nabla_{\alpha\lambda}\varphi \nabla_{\overline{\beta\mu}}\varphi + \nabla_{\lambda\bar{\beta}}\varphi \nabla_{\alpha\bar{\mu}}\varphi) \leqslant E_1.
$$

Donc, en reportant (15) et (16) dans la définition (11) de G_3, on obtient:

$$
\begin{aligned}
G_3 \leqslant &-\left[\frac{\partial F}{\partial p^{\alpha}} \nabla_{\alpha}[\operatorname{Log}(m-\Delta\varphi) + l\, |\nabla\varphi|^2] + \text{conj.}\right] \\
&+ (lC_6 - k)\, g'^{\alpha\bar{\beta}} g_{\alpha\bar{\beta}} + (C_8 - l)\, E_1 + C_9,
\end{aligned}
$$

où $C_9 = lC_6 + mk + C_7$. Et par suite, en utilisant à nouveau le fait que $\Gamma(\varphi)$ est stationnaire en P, il vient, d'après (12),

$$\left| \frac{\partial F}{\partial p^\alpha} \nabla_\alpha [\operatorname{Log}(m - \Delta\varphi) + l\, |\nabla\varphi|^2] + \text{conj.} \right| \leqslant C_{10} = k\, \|F\|_{C^1(K)} \sup_{\mathscr{B}} \|\varphi\|_{C^1(X)}.$$

Ainsi,

$$G_3 \leqslant (lC_6 - k)\, g'^{\alpha\bar\beta} g_{\alpha\bar\beta} + (C_8 - l)\, E_1 + C_9 + C_{10}. \tag{17}$$

Enfin pour avoir notre estimée, reportons les inégalités (9), (14), et (17) dans (10), prenons $\varepsilon = 2C_4 C_2^{-1}$ et notons $C_{11} = \max(C_6, 2C_4 C_2^{-1})$. La relation qui en résulte s'écrit comme suit:

$$\left[\left(1 - \frac{C_4}{m - \Delta\varphi}\right) k - C_{11} \left(1 + \frac{C_4}{m - \Delta\varphi}\right) l - C_3 - C_4 \right] g'^{\alpha\bar\beta} g_{\alpha\bar\beta}$$

$$\leqslant \left(C_8 - \frac{l}{2} \right) E_1 + C_3 + C_9 + C_{10}. \tag{18}$$

Il s'agit à présent de déterminer k et l de façon que, dans (18), les coefficients de E_1 et $g'^{\alpha\bar\beta} g_{\alpha\bar\beta}$ soient respectivement $\leqslant 0$ et > 0. Si

$$(m - \Delta\varphi)(P) \geqslant \pi = 2C_4(1 + C_{11}), \tag{19}$$

les termes $C_4(m - \Delta\varphi)^{-1}$ et $C_4 C_{11}(m - \Delta\varphi)^{-1}$ sont au plus égaux à $\frac{1}{2}$. L'inégalité (18) donne:

$$[k/2 - (C_{11} + 1/2)\, l - C_3 - C_4]\, g'^{\alpha\bar\beta} g_{\alpha\bar\beta} \leqslant (C_8 - l/2)\, E_1 + C_3 + C_9 + C_{10}.$$

On prend alors $l = 2C_8$ et $k = 2[(C_{11} + 1/2)\, l + C_3 + C_4 + 1]$ ce qui implique que

$$g'^{\alpha\bar\beta} g_{\alpha\bar\beta}(P) \leqslant C_{12} = C_3 + C_9 + C_{10}$$

et comme φ vérifie (1), on déduit Aubin [4, p. 74] que $(m - \Delta\varphi)(P) \leqslant C_{13}$, où C_{13} dépend de C_{12} et de $\sup_K F(x, p; t)$. Ainsi, d'après (19), on a

$$(m - \Delta\varphi)(P) \leqslant \max(C_{13}, \pi).$$

Finalement en écrivant que $\Gamma(\varphi) \leqslant \Gamma(\varphi)(P)$, partout dans X, on conclut à l'aide de la définition de $\Gamma(\varphi)$ que

$$0 < C_2 \leqslant m - \Delta\varphi \leqslant C'_2.$$

LEMME 8. *Conservons les notations du Lemme 7. Soient* $F \in C^2(TX \times \mathbb{R})$ *et* $\mathscr{B} \subset C^4(X)$ *un ensemble de solutions admissibles de* (1) *vérifiant* (2). *Si* $\varphi \in \mathscr{B}$, *on pose*

$$\psi^2 = g'^{\alpha\bar{\beta}} g^{a\bar{b}} \nabla_{\alpha a} \varphi \nabla_{\overline{\beta b}} \varphi, \qquad \theta^2 = g'^{\alpha\bar{\beta}} g'^{a\bar{b}} g^{\lambda\bar{\mu}} \nabla_{a\bar{b}\lambda} \varphi \nabla_{\bar{\beta}a\bar{\mu}} \varphi.$$

(i) *Il existe une constante positive c telle que, pour tout* $\varphi \in \mathscr{B}$, *on ait*

$$\begin{aligned} &\Delta'\psi^2 + \|E\|'^2 + K_2 + (g'^{\alpha\bar{\beta}} g^{a\bar{b}} \nabla_{\alpha a} \varphi \nabla_{\overline{\beta b}} F + \text{conj.}) \\ &\quad - g'^{\alpha\bar{\sigma}} g'^{\rho\bar{\beta}} g^{a\bar{b}} \nabla_{\alpha a} \varphi \nabla_{\overline{\beta b} \varphi} \nabla_{\rho\bar{\sigma}} \varphi \nabla_{\rho\bar{\sigma}} F \leqslant c(1+\theta)(1+\psi^2), \end{aligned} \tag{3}$$

où en repère g'*-orthonormé* $K_2 = \sum_{\lambda, \alpha, a} g^{a\bar{a}} |\nabla_{\bar{\lambda}\alpha a} \varphi|^2$ *et les composantes du tenseur E sont définies par*

$$E_{\lambda\alpha a} = \nabla_{\lambda\alpha a} \varphi - \sum_{\rho} \nabla_{\lambda\bar{\rho}\alpha} \varphi \nabla_{\rho a} \varphi. \tag{4}$$

La constante c est fonction de a, b, d'une estimée C^0 *du gradient et des dérivées secondes mixtes de* φ *ainsi que d'une norme* $C^0(X)$ *des teneurs* $\mathscr{R}$, $\mathscr{T}$ *et* $\nabla\mathscr{T}$.

(ii) *On a* $\sup_{\varphi \in \mathscr{B}} \|\psi\|_{C^0(X)} < \infty$.

Démonstration. 1. Montrons d'abord comment la partie (ii) se déduit de l'inégalité (3). Soit $\varphi \in \mathscr{B}$, et soient k et l deux réels strictement positifs précisés ultérieurement. Notons $J = k |\nabla\varphi|^2 + l(m - \Delta\varphi)$ et désignons par $\Gamma(\varphi)$ la fonctionnelle

$$\Gamma(\varphi) = \psi \exp(e^J).$$

En un point $P \in X$, où $\Gamma(\varphi)$ atteint son maximum, supposons que $\psi(P) \geqslant 1$ et écrivons que le laplacien de Log $\Gamma(\varphi)$ dans la métrique déformée est non négatif, il vient,

$$0 \leqslant \Delta'[\text{Log}\, \Gamma(\varphi)] = \frac{\Delta'\psi}{\psi} + \frac{|\nabla'\psi|^2}{\psi^2} + e^J(\Delta' J + |\nabla' J|^2).$$

Donc, comme

$$\Delta'\psi = \frac{\Delta'\psi^2}{2\psi} + \frac{|\nabla'\psi|^2}{\psi},$$

on obtient

$$0 \leqslant \frac{\Delta'\psi^2}{2\psi^2} + \frac{|\nabla'\psi^2|^2}{2\psi^4} - e^J |\nabla' J|^2 + e^J \Delta' J. \tag{5}$$

D'autre part, Log $\Gamma(\varphi)$ étant stationnaire en P, on en déduit que

$$\nabla\psi = -\psi e^J \nabla J. \tag{6}$$

Majorons chacun des termes du membre de droite de (5).

Compte tenu de (3), le développement des termes en F montre l'existence d'une constante positive k_2 telle que

$$\Delta'\psi^2 \leqslant k_2(1+\theta^2+\psi^4)-(K_2+\|E\|'^2)-\left(\frac{\partial F}{\partial p^\alpha}\nabla_\alpha\psi^2+\text{conj.}\right). \tag{7}$$

Développons ensuite $\nabla\psi^2$ dans un repère g'-orthonormé; d'après (4), on peut écrire,

$$\nabla_\lambda\psi^2 = g^{a\bar{a}}E_{\lambda\alpha a}\nabla_{\overline{\alpha a}}\varphi + g^{a\bar{a}}\nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\lambda\overline{\alpha a}}\varphi = A_\lambda + B_\lambda,$$

avec $A_\lambda = g^{a\bar{a}}E_{\lambda\alpha a}\nabla_{\overline{\alpha a}}\varphi$ et $B_\lambda = g^{a\bar{a}}\nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\lambda\overline{\alpha a}}\varphi$. Par suite, si

$$|A|^2 = \sum_\lambda |A_\lambda|^2, \qquad |B|^2 = \sum_\lambda |B_\lambda|^2,$$

on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|\nabla'\psi^2|^2 = \sum_\lambda |A_\lambda + B_\lambda|^2 \leqslant (1+\varepsilon)\,|A|^2 + (1+\varepsilon^{-1})\,|B|^2.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy,

$$|A|^2 \leqslant \psi^2\,\|E\|'^2, \qquad |B|^2 \leqslant \psi^2 K_2.$$

Ainsi,

$$\frac{|\nabla'\psi^2|^2}{\psi^2} \leqslant (1+\varepsilon)\,\|E\|'^2 + (1+\varepsilon^{-1})\,K_2. \tag{8}$$

Soit $\delta = 2^{-1}e^{-J}$. Comme il résulte de (6) que

$$2\delta\,\frac{|\nabla'\psi|^2}{\psi^2} = e^{-J}(e^2J\,|\nabla'J|^2) = e^J\,|\nabla'J|^2,$$

on peut écrire

$$\frac{|\nabla'\psi^2|^2}{2\psi^4} - e^J\,|\nabla'J|^2 = (1-\delta)\,\frac{|\nabla'\psi^2|^2}{2\psi^4}.$$

Par suite, vu l'inégalité (8) où l'on choisit $\varepsilon = \delta/(1-\delta)$ et puisqu'alors $(1-\delta)(1+\varepsilon) = 1$ et $(1-\delta)(1+\varepsilon^{-1}) = (1-\delta)/\delta = 2e^J - 1$, on obtient

$$\frac{|\nabla'\psi^2|^2}{2\psi^4} - e^J\,|\nabla'J|^2 \leqslant \frac{\|E\|'^2 + (2e^J-1)\,K_2}{2\psi^2}. \tag{9}$$

Poursuivons par l'étude du dernier terme de (5). La relation (8) de la preuve du Lemme 7 où l'on développe le terme $\varDelta[F(x, \nabla\varphi; \varphi)]$ implique l'existence de constantes positives $(k_i)_{i=3,4,5}$ telle que

$$\varDelta'(m-\varDelta\varphi) \leqslant k_3 - k_4\theta^2 + k_5\psi^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial p^\alpha}\nabla_\alpha(m-\varDelta\varphi) + \text{conj.}\right). \tag{10}$$

Ensuite l'inégalité (15) de la preuve du même lemme montre qu'il existe une constante positive k_6 telle que

$$\varDelta' |\nabla\varphi|^2 \leqslant k_6 - \psi^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial p^\alpha}\nabla_\alpha |\nabla\varphi|^2 + \text{conj.}\right).$$

Ainsi,

$$\varDelta' J \leqslant lk_3 + kk_6 - lk_4\theta^2 + (lk_5 - k)\,\psi^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial p^\alpha}\nabla_\alpha J + \text{conj.}\right). \tag{11}$$

Enfin, en reportant (6), (7), (9), et (11) dans (5) et puisque (6) implique que

$$\frac{\partial F}{\partial p^\alpha}\left(\frac{\nabla_\alpha\psi}{\psi} + e^J\nabla_\alpha J\right) = 0,$$

on obtient

$$0 \leqslant \frac{k_2}{2\psi^2}(1+\theta^2+\psi^4) + \frac{e^J-1}{\psi^2}K_2 + e^J[lk_3 + kk_6 - lk_4\theta^2 + (lk_5-k)\,\psi^2]. \tag{12}$$

Par suite, comme $\nabla_{\alpha\bar{\lambda}a}\varphi - \nabla_{\bar{\lambda}\alpha a}\varphi = R^b_{a\alpha\lambda}\nabla_b\varphi$, on voit que $K_2 \leqslant 2\theta^2 k_7$, où k_7 est fonction de $\|\mathscr{R}\|_\infty$ et $\sup_{\varphi\in\mathscr{B}}\|\nabla\varphi\|$ ainsi que des réels a et b, définis au Lemme 7.

Or $\psi(P) \geqslant 1$, l'inégalité (12) prend alors la forme

$$0 \leqslant (k_2 + 2e^J - lk_4 e^J)\,\theta^2 + (k_2 - ke^J + lk_5 e^J)\,\psi^2 + k_8, \tag{13}$$

où $k_8 = k_2 + (kk_6 + lk_3 + k_7)\exp(\|J\|_\infty)$. Choisissons $l = (2 + k_2/2)\,k_4^{-1}$ puis $k = 1 + lk_5 + k_2/2$. Comme $e^J \geqslant 1$, les coefficients de θ^2 et ψ^2 dans (13) sont alors respectivement $\leqslant 0$ et $\leqslant -1$. Par conséquent,

$$\psi^2(2) \leqslant \max(1, k_8).$$

La démonstration s'achève en écrivant que partout dans X, on a $\Gamma(\varphi) \leqslant \Gamma(\varphi)(P)$, et en tenant compte de la définition de la fonctionnelle $\Gamma(\varphi)$ ainsi que de l'estimée C^1 et l'estimée des dérivées secondes mixtes.

2. Indiquons maintenant les étapes de la démonstration de (3). Le développement de $\Delta'\psi^2$ nous permet d'écrire

$$\Delta'\psi^2 = \sum_{i=1}^{6} K_i, \tag{14}$$

où

$$K_1 = g'^{\lambda\bar{\mu}} g'^{\alpha\bar{\beta}} g^{a\bar{b}} (\nabla_{\lambda\bar{\mu}\alpha a}\varphi \nabla_{\overline{\beta b}}\varphi + \nabla_{\alpha a}\varphi \nabla_{\lambda\overline{\mu\beta b}}\varphi)$$
$$K_2 = g'^{\lambda\bar{\mu}} g'^{\alpha\bar{\beta}} g^{\alpha\bar{b}} \nabla_{\bar{\mu}\alpha a}\varphi \nabla_{\lambda\overline{\beta b}}\varphi$$
$$K_3 = g'^{\lambda\bar{\mu}} g'^{\alpha\bar{\beta}} g^{a\bar{b}} \nabla_{\lambda\alpha a}\varphi \nabla_{\overline{\mu\beta b}}\varphi$$
$$K_4 = g'\lambda^{\bar{\mu}} g^{a\bar{b}} (g'^{\alpha\bar{\delta}} g'^{\gamma\bar{\sigma}} g'^{\rho\bar{\beta}} + g'^{\alpha\bar{\sigma}} g'^{\rho\bar{\delta}} g'^{\gamma\bar{\beta}})\, \nabla_{\lambda\bar{\delta}\gamma}\varphi \nabla_{\bar{\mu}\rho\bar{\sigma}}\varphi \nabla_{\alpha a}\varphi \nabla_{\overline{\beta b}}\varphi$$
$$K_5 = -g'^{\lambda\bar{\mu}} g'^{\alpha\bar{\sigma}} g'\rho^{\bar{\beta}} g^{a\bar{b}} \nabla_{\lambda\bar{\mu}\rho\bar{\sigma}}\varphi \nabla_{\alpha a}\varphi \nabla_{\overline{\beta b}}\varphi$$
$$K_6 = g'^{\lambda\bar{\mu}} g'^{\alpha\bar{\sigma}} g'^{\rho\bar{\beta}} [(\nabla_{\lambda\bar{\sigma}\rho}\varphi \nabla_{\bar{\mu}\alpha a}\varphi + \nabla_{\bar{\mu}\rho\bar{\sigma}}\varphi \nabla_{\lambda\alpha a}\varphi)\, \nabla_{\overline{\beta b}}\varphi$$
$$+ (\nabla_{\lambda\bar{\sigma}}\rho\, \varphi \nabla_{\overline{\mu\beta b}}\varphi + \nabla_{\bar{\mu}\rho\bar{\sigma}}\varphi \nabla_{\lambda\overline{\beta b}}\varphi)\, \nabla_{\alpha a}\varphi].$$

Nous dirons que $U \simeq V$, s'il existe une constante positive c telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{B}$, on ait $|U(\varphi) - V(\varphi)| \leqslant c(1+\theta)(1+\psi^2)$; la constante c n'est fonction que des quantités du lemme.

Pour alléger l'écriture, nous donnerons souvent l'expression des tenseurs utilisés dans des repères g'-orthonormé et nous userons de la convention de sommation sur les indices conjugés placés en position inférieure.

(i) Etude de K_4. Posons, en repère g'-orthonormé,

$$A = g^{a\bar{a}} \nabla_{\lambda\bar{\alpha}\gamma}\varphi \nabla_{\bar{\lambda}\rho\bar{\gamma}}\varphi \nabla_{\alpha a}\varphi \nabla_{\overline{\rho a}}\varphi,$$
$$B = g^{a\bar{a}} \nabla_{\lambda\bar{\rho}\gamma}\varphi \nabla_{\bar{\lambda}\rho\bar{\alpha}}\varphi \nabla_{\alpha a}\varphi \nabla_{\overline{\gamma a}}\varphi.$$

on constate que

$$K_4 = A + B. \tag{15}$$

(ii) Etude de K_5. On élimine $g'^{\lambda\bar{\mu}} \nabla_{\rho\bar{\sigma}\lambda\bar{\mu}}\varphi$ en dérivant deux fois (1), ce qui donne:

$$K_5 + g'^{\alpha\bar{\sigma}} g'^{\rho\bar{\beta}} g^{a\bar{b}} (\nabla_{\rho\bar{\sigma}}F + g'^{\lambda\bar{\delta}} g'^{\gamma\bar{\mu}} \nabla_{\rho\bar{\delta}\gamma}\varphi \nabla_{\bar{\sigma}\lambda\bar{\mu}}\varphi)\, \nabla_{\alpha a}\varphi \nabla_{\overline{\beta b}}\varphi$$
$$= g'^{\lambda\bar{\mu}} g'^{\alpha\bar{\sigma}} g'^{\rho\bar{\beta}} g^{a\bar{b}} (\nabla_{\rho\bar{\sigma}\lambda\bar{\mu}}\varphi - \nabla_{\lambda\bar{\mu}\rho\bar{\sigma}}\varphi)\, \nabla_{\alpha a}\varphi \nabla_{\overline{\beta b}}\varphi. \tag{16}$$

D'après une identité analogue à celle donnée par la relation (7) de la preuve du Lemme 7, le membre de droite de (16) est équivalent à zéro.

D'autre part, au membre de gauche de (16), le terme en $(\nabla^2\varphi)^2\,(\nabla^3\varphi)^2$, qui s'écrit dans un repère g'-orthonormé,

$$g^{a\bar{a}}\nabla_{\gamma\bar{\rho}\lambda}\varphi\nabla_{\alpha\bar{v}\rho\bar{\lambda}}\varphi\nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\gamma a}}\varphi,$$

diffère de B par $Cte(1+\theta)\,\psi^2$, compte tenu des commutations (9) et (10) de la preuve du Lemme 6.

Ainsi,

$$|K_5 + g'^{\alpha\bar{\sigma}}g'^{\rho\bar{\beta}}g^{a\bar{b}}\nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\beta b}}\varphi\nabla_{\rho\bar{\sigma}}F + B| \leqslant c(1+\theta)\,\psi^2. \tag{17}$$

(iii) Etude de K_6. Notant, en repère g'-orthonormé,

$$C = g^{a\bar{a}}\nabla_{\lambda\bar{\alpha}a}\varphi\nabla_{\bar{\lambda}\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\rho a}}\varphi$$

$$D = g^{a\bar{a}}\nabla_{\lambda\bar{\alpha}\rho}\varphi\nabla_{\overline{\lambda\rho a}\varphi}\nabla_{\alpha a}\varphi,$$

on voit que

$$K_6 + (C+\bar{C}) + (D+\bar{D}) = 0. \tag{18}$$

(iv) Etude de K_1. Du fait que $|\nabla_{\lambda\bar{\mu}\alpha a} - \nabla_{\bar{\mu}\lambda\alpha a}\varphi| \leqslant c\psi$, on peut écrire,

$$K_1 \simeq K'_1 + \bar{K}'_1 \tag{19}$$

où

$$K'_1 = g'^{\lambda\bar{\mu}}g'^{\alpha\bar{\beta}}g^{a\bar{b}}\nabla_{\lambda\bar{\mu}\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\beta b}}\varphi.$$

En dérivant deux fois l'équation (1) satisfaite par φ, on élimine les dérivées covariantes d'ordre quatre de celle-ci. En effet,

$$g'^{\lambda\bar{\mu}}\nabla_{\alpha a\lambda\bar{\mu}}\varphi = \nabla_{\alpha a}F + g'^{\lambda\bar{\rho}}g'^{v\bar{\mu}}\nabla_{\alpha v\bar{\rho}}\varphi\nabla_{a\lambda\bar{\mu}}\varphi$$

et donc

$$g'^{\lambda\bar{\mu}}\nabla_{\lambda\bar{\mu}\alpha a}\varphi = g'^{\lambda\bar{\mu}}(\nabla_{\lambda\bar{\mu}\alpha a}\varphi - \nabla_{\alpha a\lambda\bar{\mu}}\varphi) + \nabla_{\alpha a}F + g'^{\lambda\bar{\rho}}g'^{v\bar{\mu}}\nabla_{\alpha v\bar{\rho}}\varphi\nabla_{\alpha\lambda\bar{\mu}}\varphi.$$

D'autre part, tenant compte de la formule tensorielle (I-1), on montre que

$$|\nabla_{\alpha a\lambda\bar{\mu}}\varphi - \nabla_{\lambda\bar{\mu}\alpha a}\varphi| \leqslant Cte(1+\theta)(1+\psi).$$

Ainsi

$$K'_1 \simeq g'^{\alpha\bar{\beta}}g^{a\bar{b}}\{\nabla_{\alpha a}F + g'^{\lambda\bar{\rho}}g'^{v\bar{\mu}}\nabla_{\alpha\lambda\bar{\mu}}\varphi\nabla_{\alpha v\bar{\rho}}\varphi\}\ \nabla_{\overline{\beta b}}\varphi.$$

Dans cette équivalence le terme en $(\nabla^3\varphi)^2\,\nabla^2\varphi$ est équivalent à C en vertu des relations (9) et (10) de la preuve du Lemme 6. Donc, tenant compte de (19), on déduit que

$$K_1 \simeq C + \bar{C} + (g^{a\bar{a}}\nabla_{\overline{\alpha a}\varphi}\nabla_{\alpha a}F + \text{conj.}). \tag{20}$$

(v) Il résulte de (14), (15), (17), (18), et (20) que

$$-\Delta'\psi^2 \simeq K_2 + K_3 + A + [(g^{a\bar{a}}\nabla_{\overline{\alpha a}}\varphi\nabla_{\alpha a}F - D) + \text{conj.}]$$
$$-g^{a\bar{a}}\nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\rho a}}\varphi\nabla_{\rho\bar{\alpha}}F.$$

c'est-à-dire (3) en remarquant que, d'après (4),

$$\|E\|'^2 = g'^{\lambda\bar{\mu}}g'^{\alpha\bar{\beta}}g^{a\bar{b}}E_{\lambda\alpha a}E_{\overline{\mu\beta b}} = K_3 - (D + \bar{D}) + A.$$

3. En remarque, signalons que les calculs du premier paragraphe de la démonstration se simplifient énormément quand le second membre F est pseudoconcave par rapport à p. En effet, en conservant les mêmes notations et en tenant compte du fait que la matrice $(\partial^2F/\partial p^\rho\,\partial p^{\bar{\sigma}})_{\rho,\sigma}$ est partout négative et vu la positivité des normes K_2 et $\|E\|'^2$, le développement des termes en F dans (3) montre qu'il existe une constante positive k_9 telle que

$$\Delta'\psi^2 \leqslant k_9[(1+\theta)(1+\psi^2) + \psi^3] - \left(\frac{\partial F}{\partial p^\alpha}\nabla_\alpha\psi^2 + \text{conj.}\right). \tag{21}$$

Ensuite

$$|\nabla'(m - \Delta\varphi)|^2 \leqslant k_{10}(1 + \theta^2). \tag{22}$$

Pour voir (22), on considère le carré positive suivant

$$0 \leqslant g^{\alpha\bar{\lambda}}g^{\mu\bar{\beta}}g^{\gamma\bar{\nu}}(\nabla_{\alpha\bar{\beta}\gamma}\varphi + m^{-1}g_{\alpha\bar{\beta}}\nabla_\alpha\Delta\varphi)(\nabla_{\bar{\lambda}\mu\bar{\nu}}\varphi + m^{-1}g_{\mu\bar{\lambda}}\nabla_{\bar{\nu}}\Delta\varphi)$$
$$= \nabla^{\alpha\bar{\beta}\gamma}\varphi\nabla_{\alpha\bar{\beta}\gamma}\varphi - m^{-1}\,|\nabla(m - \Delta\varphi)|^2 - m^{-1}(g^{\alpha\bar{\beta}}g^{\gamma\bar{\mu}}T^\delta_{\alpha\gamma}\nabla_{\delta\bar{\beta}}\varphi\nabla_{\bar{\nu}}\Delta\varphi + \text{conj.})$$

et la majoration, déduite de l'inégalité de Cauchy,

$$|g^{\alpha\bar{\beta}}g^{\gamma\bar{\nu}}T^\delta_{\alpha\gamma}\nabla_{\delta\bar{\beta}}\varphi\nabla_{\bar{\nu}}\Delta\varphi| \leqslant \sqrt{m}\,\|\mathscr{T}\|\,(\nabla^{\alpha\bar{\beta}}\varphi\nabla_{\alpha\bar{\beta}}\varphi)^{1/2}\,|\nabla(m - \Delta\varphi)|$$
$$\leqslant k_{11}\,|\nabla(m - \Delta\varphi)| \leqslant 4^{-1}\,|\nabla(m - \Delta\varphi)|^2 + k_{11}^2;$$

d'où $|\nabla(m - \Delta\varphi)|^2 \leqslant 2m(\nabla^{\alpha\bar{\beta}\gamma}\varphi\nabla_{\alpha\bar{\beta}\gamma}\varphi + k_{11}^2)$ et, par suite, (22) compte tenu de l'équivalence des métriques g et g'. De même en développant un carré convenable, on montre que

$$|\nabla'\,|\nabla\varphi|^2\,|^2 \leqslant k_{12}(1 + \psi^2). \tag{23}$$

Soient maintenant k et l deux réels strictement positifs et $P \in X$ un point où la fonction

$$\Gamma(\varphi) = \psi + J, \qquad \text{où} \qquad J = k\,|\nabla\varphi|^2 + l(m - \Delta\varphi),$$

atteint son maximum. Ainsi $\nabla'\Gamma(\varphi)(P) = 0$ et d'après (22) et (23), on a:

$$|\nabla'\psi|^2 \leqslant k_{13}(1 + l^2\theta^2 + k^2\psi^2) \qquad \text{en } P. \tag{24}$$

Supposons que $\psi(P) \geqslant 1$ et écrivons que $\Delta'\psi = (\Delta'\psi^2/2\psi) + (|\nabla'\psi|^2/\psi)$ et $\Delta'\Gamma(\varphi)(P) \geqslant 0$. On déduit de (11), (21), et (24) qu'il existe une constante positive k_{14} telle qu'en P, on ait:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant{}& (k_9 + l^2 k_{13}\psi^{-1} - lk_4)\,\theta^2 + (k^2 k_{13}\psi^{-1} + 2k_9 + lk_5 - k)\,\psi^2 \\ &- \left(\frac{\partial F}{\partial p^\alpha}\nabla_\alpha\Gamma + \text{conj.}\right) + k_{14}. \end{aligned}$$

Prenons alors $l = k_4^{-1}(k_9 + k_{13})$ et puis $k = 1 + lk_5 + 2k_9 + k_{13}$. On en déduit que si

$$\psi(P) \geqslant k_{15} = \max(k^2, l^2),$$

alors $\psi(P) \leqslant k_{14}$ et par suite $\psi(P) \leqslant k_{16} = \max(1, k_{14}, k_{15})$.

Or $J \geqslant 0$ et $\Gamma(\varphi) \leqslant \Gamma(\varphi)(P)$, on a donc $\psi \leqslant \psi(P) + \|J\|_\infty$ et puisque $\|J\|_\infty < \infty$, on conclut que $\psi \leqslant Cte$.

LEMME 9. *Conservons les notations du Lemme 7. Soient $F \in C^3(TX \times \mathbb{R})$ et $\mathscr{B} \subset C^5(X)$ un ensemble de solutions admissibles de* (1) *vérifiant* (2). *Si $\varphi \in \mathscr{B}$, on pose*

$$\Omega^2 = g'^{\alpha\bar\beta} g'^{a\bar b} g'^{c\bar d}\nabla_{\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi.$$

(i) *Il existe deux constantes positives k_1 et k_2 telles que, pour tout $\varphi \in \mathscr{B}$, on ait*:

$$\begin{aligned} &\Delta'\Omega^2 + (g'^{\alpha\bar\beta} g'^{a\bar b} g'^{c\bar d}\nabla_{\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}F + \text{conj.}) \\ &\qquad - H^{a\alpha\overline{b\beta}c\gamma\overline{d\delta}}\nabla_{\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi\nabla_{\gamma\bar\delta}F \leqslant k_1(1 + \Omega^3) \end{aligned} \tag{3}$$

et

$$\Delta'\Omega^2 \leqslant k_2(1 + \Omega^3) - \left(\frac{\partial F}{\partial p^\alpha}\nabla_\alpha\Omega^2 + \text{conj.}\right). \tag{4}$$

Les composantes du tenseur H sont définies par

$$H^{a\alpha\cdots\overline{d\delta}} = g'^{\alpha\bar\delta} g'^{\gamma\bar\beta} g'^{a\bar b} g'^{c\bar d} + g'^{\alpha\bar\beta} g'^{a\bar\delta} g'^{\gamma\bar b} g'^{c\bar d} + g'^{\alpha\bar\beta} g'^{a\bar b} g'^{c\bar\delta} g'^{\gamma\bar d}.$$

La constante k_1 *est fonction d'une estimée* $C^0(X)$ *du gradient et des dérivées secondes mixtes de* φ *ainsi que d'une norme* $C^0(X)$ *des tenseurs* $\mathscr{R}$, $\mathscr{T}$, $\nabla\mathscr{R}$, $\nabla\mathscr{T}$, *et* $\nabla^2\mathscr{T}$; k_2 *dépend en outre de* $\|F\|_{C^3(K)}$ *et d'une estimée* $C^0(X)$ *des dérivées secondes pures de* φ.

(ii) *On a* $\sup_{\varphi\in\mathscr{B}}\|\Omega\|_{C^0(X)}<\infty$ *et, quel que soit* $\alpha\in\,]0,1[$, $\mathscr{B}$ *est borné dans* $C^{3,\alpha}(X)$.

Démonstration. L'inégalité (3) est obtenue en opérant comme au Lemme 6 de Cherrier [7, p. 367]. Pour établir (4) à partir de (3), notons $U\simeq V$ lorsqu'il existe une constante positive c telle que pour tout $\varphi\in\mathscr{B}$, on ait: $|U(\varphi)-V(\varphi)|\leqslant c(1+\Omega^3)$. En développant les termes en F dans (3), on peut écrire

$$[g'^{\alpha\bar\beta}g'^{c\bar d}\nabla_{\alpha\bar b\bar c}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}F(x,\nabla\varphi;\varphi)+\text{conj.}]$$
$$\simeq\left[g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{c\bar d}\nabla_{\alpha\bar b c}\varphi\left(\frac{\partial F}{\partial p^\lambda}\nabla_{\bar\beta a\bar d\lambda}\varphi+\frac{\partial F}{\partial p^{\bar\lambda}}\nabla_{\bar\beta a\bar d\bar\lambda}\varphi\right)+\text{conj.}\right]$$

et

$$H^{a\alpha\cdots\overline{d\delta}}\nabla_{\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi\nabla_{\gamma\bar\delta}F(x,\nabla\varphi;\varphi)$$
$$\simeq H^{a\alpha\cdots\overline{d\delta}}\nabla_{\alpha\bar d c}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi\left(\frac{\partial F}{\partial p^\lambda}(x,\nabla\varphi;\varphi)\,\nabla_{\gamma\bar\delta\lambda}\varphi+\frac{\partial F}{\partial p^{\bar\lambda}}(x,\nabla\varphi;\varphi)\,\nabla_{\gamma\bar\delta\bar\lambda}\varphi\right).$$

L'inégalité (4) se déduit alors en groupant ces deux dernières équivalences et en tenant compte de la relation tensorielle (I-1).

Pour établir la seconde partie du lemme, désignons par k un réel strictement positif, précisé plus bas, et $P\in X$ un point où la fonctionnelle

$$\Gamma=\Omega+k(m-\Delta\varphi)$$

atteint son maximum. Ainsi, d'après la relation (22) de la preuve du Lemme 8,

$$|\nabla'\Omega|^2=k^2\,|\nabla'(m-\Delta\varphi)|^2\leqslant k^2k_{10}(1+\Omega^2)\qquad\text{en } P. \tag{5}$$

Or, tenant compte de l'équivalence des métriques g et g', l'inégalité (10) de la preuve du Lemme 8 montre l'existence de réels strictement positifs k_3 et k_4 telle que

$$\Delta'(m-\Delta\varphi)\leqslant k_3-k_4\Omega^2-\left(\frac{\partial F}{\partial p^\alpha}\nabla_\alpha(m-\Delta\varphi)+\text{conj.}\right). \tag{6}$$

Supposons $\Omega(P) \geqslant 1$, écrivons que $\Delta'\Omega = (\Delta'\Omega^2/2\Omega) + (|\nabla'\Omega|^2/\Omega)$ et que la laplacien de Γ dans la métrique g' est non négatif en P, compte tenu des relations (4), (5), et (6), on obtient

$$0 \leqslant (k_2 - kk_4)\, \Omega^2 + k^2 k_{10} \Omega + kk_3 + k_2 - \left(\frac{\partial F}{\partial p^\alpha} \nabla_\alpha \Gamma + \text{conj.}\right).$$

Prenons $k = k_4^{-1}(1 + k_2)$. Puisque $\nabla\Gamma(P) = 0$, on en déduit que

$$\Omega(P) \leqslant k_5 = \max(1, 2k^2 k_{10} + kk_3 + k_2).$$

Enfin, en écrivant que, partout dans $X, \Omega \leqslant \Gamma \leqslant \Gamma(P)$, on conclut que $\Omega \leqslant Cte$.

Soit maintenant U un ouvert muni de coordonnées complexes. La relation $g'^{\lambda\bar\mu} \nabla_{\nu\lambda\bar\mu} \varphi = \nabla_\nu F$, obtenu par une dérivation de (1), s'écrit dans U comme suit

$$L(\partial_\nu \varphi) = g'^{\lambda\bar\mu} T^\rho_{\nu\lambda} \partial_{\rho\bar\mu} \varphi + \partial_\nu F(\cdot, \nabla\varphi; \varphi) + \frac{\partial F}{\partial p^\alpha}(x, \cdot; \varphi)\, T^\rho_{\nu\alpha} \partial_\rho \varphi \equiv H_\nu,$$

où l'opérateur L est défini par

$$L = g'^{\alpha\bar\beta} \partial_{\alpha\bar\beta} - \left(\frac{\partial F}{\partial p^\alpha} \partial_\alpha + \text{conj.}\right) - F'_t.$$

Du fait que les dérivées mixtes et troisièmes mixtes sont estimées a priori, $\partial_{\lambda\bar\mu} \varphi$ et $g'^{\lambda\bar\mu}$ sont localement estimées dans C^1 donc dans $C^{0,\alpha}$. D'autre part, la solution φ étant estimée dans $C^2(U)$, donc elle l'est aussi dans $C^{1,\alpha}(U)$. Ainsi, $\|H_\nu\|_{C^{0,\alpha}(U)} \leqslant Cte$, et d'après Schauder, pour tout compact $K \subset U$ on a

$$\|\partial_\nu \varphi\|_{C^{2,\alpha}(K)} \leqslant c(K, U, \alpha, \lambda_1, \lambda_2)[\, \|\partial_\nu \varphi\|_{C^0(U)} + \|H_\nu\|_{C^\alpha(U)}] \leqslant Cte,$$

où λ_1 est un module d'ellipticité commun aux opérateurs $g'^{\alpha\bar\beta} \nabla_{\alpha\bar\beta}$ et λ_2 est une borne $C^\alpha(U)$ des coefficients de l'opérateur L.

De même, on montre que $\|\partial_{\bar\alpha} \varphi\|_{C^{2,\alpha}(K)} \leqslant Cte$ et, par conséquent $\sup_{\mathscr{B}} \|\varphi\|_{C^{3,\alpha}(X)} < \infty$.

IV. Résolution d'équations

Par un argument de point fixe (voir Delanoë [8-III]), on utilise le Théorème 3 de Cherrier [9, p. 345] et les Lemmes 4, 6, et 9 pour montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses du Lemme* 4, *l'équation*

$$M(\varphi) = e^{\nu\tilde{\varphi}} F(x, \varphi - \tilde{\varphi})$$

admet une solution C^∞ *admissible.*

Enfin, on utilise le même argument et les Lemmes 5, 6, et 9 pour prouver, à l'aide du résultat précité de Cherrier, le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Sous les hypothèses des Lemmes* 5 *et* 6, *l'équation*

$$M(\varphi) = e^{\nu\tilde{\varphi}} F(x, \nabla\varphi; \varphi - \tilde{\varphi})$$

admet une solution C^∞ *admissible.*

BIBLIOGRAPHIE

1. T. AUBIN, Nonlinear analysis on manifolds, "Monge–Ampère Equations," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1982.
2. T. AUBIN, Métriques riemanniennes et courbure, *J. Differential Geom.* **4** (1970), 383–424.
3. T. AUBIN, Equations du type Monge–Ampère sur les variétés kählériennes compactes, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **283** (1976), 119–121.
4. T. AUBIN, Equations du type Monge–Ampère sur les variétés kählériennes compactes, *Bull. Sci. Math. (2)* **102** (1978), 63–95.
5. T. AUBIN, Réduction du cas positif de l'équation de Monge–Ampère sur les variétés kählériennes compactes à la démonstration d'une inégalité, *J. Funct. Anal.* **57** (1984), 143–153.
6. M. S. BERGER ET P. CHERRIER, A new variational method for finding Einstein metrics on compact Kähler manifolds I, *J. Funct. Anal.* **79** (1988), 103–135.
7. P. CHERRIER, Equations de Monge–Ampère sur les variétés hermitiennes compactes, *Bull. Sci. Math.* (2) **111** (1987), 343–385.
8. P. DELANOË, Equations du type de Monge–Ampère sur les variétés riemanniennes compactes, I–III, *J. Funct. Anal.* **40** (1980), 385–386; **41** (1981), 341–353; **45** (1982), 403–430.
9. L. HÖRMANDER, "An Introduction to Complex Analysis in Several Variables," Van Nostrand/Princeton, NJ, 1973.
10. G. TIAN, On Kähler–Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1 > 0$, *Invent. Math.* **89** (1987), 225–246.
11. S. T. YAU, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation I, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), 339–411.